Μαθημα 3º 24/10/2017

Στοχαστικες

$$p^{(n)} = (p_0^{(n)} \ \ p_1^{(n)}) = p^{(n-1)} \cdot P = \dots = p^{(0)} P^n$$

$$p^{(n)} = p^{(0)} \begin{bmatrix} p_{00}^{(n)} & p_{01}^{(n)} \\ p_{10}^{(n)} & p_{11}^{(n)} \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix}$$

$$P^n = \begin{bmatrix} \dfrac{b + a(1-a-b)^n}{a+b} & \dfrac{a - a(1-a-b)^n}{a+b} \\ \dfrac{b - b(1-a-b)^n}{a+b} & \dfrac{a + b(1-a-b)^n}{a+b} \end{bmatrix}$$

$$\pi_0 = \frac{b}{a+b}, \quad \pi_1 = \frac{a}{a+b}$$

Ασκηση 3.2.4

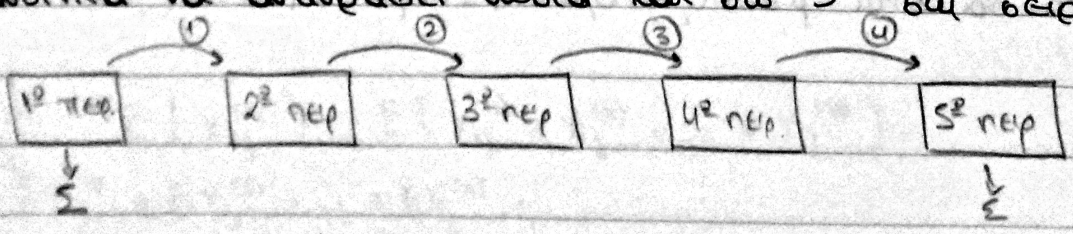
Μαρκοβιανή: η αντιδραση του σε μια επαναληψη εξαρτάται μονο απο την αντιδραση στο αμεσως προηγ.

P(Σωστα → Σωστα) = 0,7

P(Λαθος → Σωστα) = 0,4

Διακριτο χρονο T = {1, 2, 3, …} Διακριτο χωρο S = {Σ, Λ}

i) Αν στο πρωτο πειραμα ο ασθενης αντεδρασε σωστα. Ποια η πιθανοτητα να αντιδρασει σωστά και στο 5º στη σειρά πειραμα;



Δεν με ενδιαφερει το 2º, 3º, 4º πειραματα θελω απο το 1º στο 5º οσα 4 βηματα

Πινακας μεταβασης

$$P = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,4 & 0,6 \end{bmatrix}$$

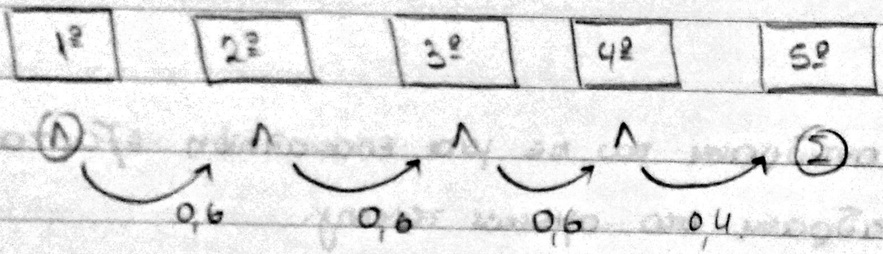
Θελω τη πιθανοτητα $P_{ΣΣ}^{(4)} = P_{00}^{(4)}$

Εχω $n=4$, $b=0,4$, $a=0,3$

Αρα η πιθανοτητα ειναι η εξης

$$P_{00}^{(4)} = \frac{0,4+0,3(1-0,3-0,4)^4}{0,7} = \dots$$

ii) Αν στο 1º πειραμα αντεδρασε λαθος ποια ειναι η πιθανοτητα να ειναι το 5º πειραμα εκεινο στο οποιο ο ασθενης θα αντιδρασει σωστα για 1º φορα;



→ Απο λαθος σε λαθος σε 3 βηματα αν ελεγα θα ηταν λαθος γιατι σημαινει οτι το 2º και 3º δε με ενδιαφερει που στη συγκεκριμενη περιπτωση θελω να ξερω τι γινεται!

Η πιθανοτητα θα ειναι $p = 0,6^3 \cdot 0,4 = \dots$

Ασκηση 3.2.1, φυλλαδια

Θεωρειστε για μια Μ.Α

$$P = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix} \qquad a+b \neq 0,\ a+b \neq 2$$

$\mu_{ij}^{(n)}$: αναμενομενο $\xrightarrow{\text{μεση αξια}}$ αριθμο επισκεψεων της κατασταση j σε n βηματα ξεκινωντας απο την i

Εστω $X_{ij}^{(n)}$ η τ.μ που παριστανει τον αριθμο των επισκεψεων της j σε n βηματα ξεκινωντας απο την i

$$X_{ij}^{(n)} = Y_{ij}^{(1)} + Y_{ij}^{(2)} + \dots + Y_{ij}^{(n)}$$

$$Y_{ij}^{(1)} = \begin{cases} 1, & \text{αν επισκεφτηκα την } j \text{ στο 1ο βημα ξεκινωντας απο την } i \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$Y_{ij}^{(2)} = \begin{cases} 1, & \text{αν επισκεφτομαι την } j \text{ στο 2ο βημα ξεκινωντας απο την } i \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

⋮

διακριτή

$$Y_{ij}^{(n)} = \begin{cases} 1, & \text{αν επισκεφτηκα την } j \text{ στο n}^{\text{ο}} \text{ βημα ξεκινωντας απο την } i \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$\mu_{ij}^{(n)} = E(X_{ij}^{(n)}) = E(Y_{ij}^{(1)} + Y_{ij}^{(2)} + \dots + Y_{ij}^{(n)}) =$$
$$= EY_{ij}^{(1)} + EY_{ij}^{(2)} + \dots + EY_{ij}^{(n)}$$

θυμαμαι:

Z τ.μ διακριτή αρα $EZ = \sum_{z} z P(Z=z)$

Εχω τωρα

διοτι και $0 \cdot P(Y_{ij}^{(1)}=0)=0$ οποτε δε το γραφω

$\mu_{ij}^{(n)} = 1 \cdot P(Y_{ij}^{(1)}=1) + 1\, P(Y_{ij}^{(2)}=1) + \ldots + 1 \cdot P(Y_{ij}^{(n)}=1) =$

$= P_{ij}^{(1)} + P_{ij}^{(2)} + \ldots + P_{ij}^{(n)}$ ειναι στοιχεια του πινακα μου

⊕ Προσοχη μοιαζει με Διωνυμική αλλα δεν

ειναι γιατί η πιθανοτητα επιτυχιας δεν ειναι σταθερη

Ασκηση 3.2.2

$$P = \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ 0 & 1-a & a \\ 1 & b & 1-b \end{array}$$

a_0 : αριθμο των νεων χρονικων περιοδο που η διαδικασια παραμενει στο 0 μεχρι να μεταπηδησει στην 1

Πρεπει να δω ποιες ειναι οι δυνατες τιμες της τ.μ a_0

μεταπηδησε κατευθειαν.

$0 \to 1$ $(a_0=0)$

$0 \to 0 \to 1$ $(a_0=1)$

$0 \to 0 \to 0 \to 1$ $(a_0=2)$

$0 \to 0 \to \ldots \to 0 \to 1$

κ.ο.κ

Θυμαμαι

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = (1-x)^{-1}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = (1-x)^{-2}$$

$P(a_0=0) = P(0\to 1) = a$

$P(a_0=1) = P(0\to 0\to 1) = (1-a)\cdot a$

$P(a_0=2) = P(0\to 0\to 0\to 1) = (1-a)^2 a$

$\vdots$

$P(a_0=k) = P(0\to 0\to 0\to \ldots \to 0\to 1) = (1-a)^k\cdot a \quad , k=0,1,2$

Διακριτη τ.μ

$$Ea_0 = \sum_{k=0}^{+\infty} k\cdot P(a_0=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} k(1-a)^k a = a\sum_{k=0}^{+\infty} k(1-a)^k =$$

$$= a\sum k(1-a)^{k-1}(1-a) = a(1-a)\sum k(1-a)^{k-1} =$$

$$= a(1-a)(1-(1-a))^{-2} = a(1-a)\cdot a^{-2} = a^{-1}(1-a) = \frac{1-a}{a}$$

Ορισμοι ειδικων περιπτωσεων στοχαστικων διαδικασιων

Τυχαιος περιπατος:

Εστω ενα σωματιδιο (μπαλακι) που κινειται τον αξονα των πραγματικων αριθμων.

Εστω X_0 η θεση του σωματιδιου τη χρονικη στιγμη 0.

Η θεση του την επομενη χρονικη στιγμη $X_1 = X_0 + Z_1$ με

Z_1: η τμ που παριστανει τη πρωτη μετατοπιση

$X_2 = X_1 + Z_2 = X_0 + Z_1 + Z_2$

$X_3 = X_2 + Z_3 = X_0 + Z_1 + Z_2 + Z_3$

$\vdots$

$X_n = X_0 + Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n = X_0 + \sum_{i=1}^{n} Z_i$

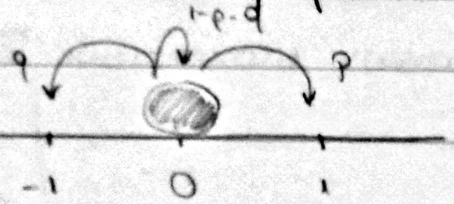
η μετατοπιση μπορει να ειναι τυχαια για αυτο λεγεται τυχαιος

Απλος τυχαιος περιπατος

Ειναι εκεινος ο τυχαιος περιπατος κατα τον οποιο οι μετατοπισεις $z_1, z_2, \dots, z_n$ ειναι ανεξαρτητες και ισονομες τ.μ με συναρτηση πιθανοτητας την εξης:

$$P(z_i = w) = \begin{cases} p, & w=1 \text{ μετατοπιση ενος βηματος μπροστα} \\ q, & w=-1 \text{ μετατοπιση ενα βημα πισω} \\ 1-p-q, & w=0 \text{ καμια μετατοπιση} \end{cases}$$

Το σωματιδιο κανει ενα βημα δεξια με πιθανοτητα p, κανει ενα βημα αριστερα με πιθανοτητα q και αναποδα, παραμενει στη θεση του με πιθανοτητα $1-p-q$



Ελευθερος τυχαιος περιπατος

Ειναι αυτος που η κινηση του δε περιοριζεται

Φραγμα απορροφησης

Ειναι το σημειο εκεινο που οταν το μπαλακι βρεθει εκει τοτε σταματα η κινηση του

Φραγμα ανακλασης

Ειναι το σημειο εκεινο που οταν φτασει το σωματιδιο εμποδιζεται η κινηση του (δε σταματα τελειως) και το σωματιδιο πηγαινει σε συγκεκριμενη κατευθυνση θυμαμαι

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = (1-x)^{-1}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = (1-x)^{-2}$$

$P(a_0=0) = P(0\to 1) = a$

$P(a_0=1) = P(0\to 0\to 1) = (1-a)\cdot a$

$P(a_0=2) = P(0\to 0\to 0\to 1) = (1-a)^2 a$

$\vdots$

$P(a_0=k) = P(0\to 0\to 0\to \dots \to 0\to 1) = (1-a)^k \cdot a \quad , k=0,1,2$

Διακριτη τ.μ

$$E a_0 = \sum_{k=0}^{+\infty} k\cdot P(a_0=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} k(1-a)^k a = a\sum_{k=0}^{+\infty} k(1-a)^k =$$

$$= a\sum k(1-a)^{k-1}(1-a) = a(1-a)\sum k(1-a)^{k-1} =$$

$$= a(1-a)(1-(1-a))^{-2} = a(1-a)\cdot a^{-2} = a^{-1}(1-a) = \frac{1-a}{a}$$

Ορισμοι ειδικων περιπτωσεων στοχαστικων διαδικασιων

Τυχαιος περιπατος:

Εστω ενα σωματιδιο (μπαλακι) που κινειται του αξονα των πραγματικων αριθμων.

Εστω X_0 η θεση του σωματιδιου τη χρονικη στιγμη 0.

Η θεση του την επομενη χρονικη στιγμη $X_1 = X_0 + Z_1$ με

Z_1: η τμ που παριστανει τη πρωτη μετατοπιση

$X_2 = X_1 + Z_2 = X_0 + Z_1 + Z_2$

$X_3 = X_2 + Z_3 = X_0 + Z_1 + Z_2 + Z_3$

$\vdots$

$X_n = X_0 + Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n = X_0 + \sum_{i=1}^{n} Z_i$

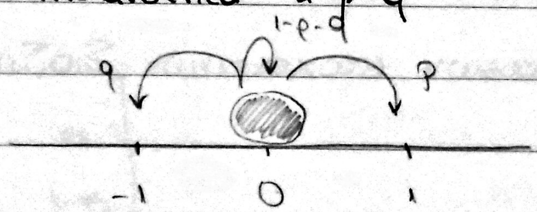
η μετατοπιση μπορει να ειναι τυχαια για αυτο λεγεται τυχαιος

Απλος τυχαιος περιπατος

Ειναι εκεινος ο τυχαιος περιπατος κατα τον οποιο οι μετατοπισεις $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ ειναι ανεξαρτητες και ισονομες τ.μ με συναρτηση πιθανοτητας την εξης:

$$P(Z_i = w) = \begin{cases} p, & w=1 \text{ μετατοπιση ενος βηματος μπροστα} \\ q, & w=-1 \text{ μετατοπιση ενα βημα πισω} \\ 1-p-q, & w=0 \text{ καμια μετατοπιση} \end{cases}$$

Το σωματιδιο κανει ενα βημα δεξια με πιθανοτητα p, κανει ενα βημα αριστερα με πιθανοτητα q και αναπηδα, παραμενει στη θεση του με πιθανοτητα 1-p-q



Ελευθερος τυχαιος περιπατος

Ειναι αυτος που η κινηση του δε περιοριζεται

Φραγμα απορροφησης

Ειναι το σημειο εκεινο που οταν το μπαλακι βρεθει εκει τοτε σταματα η κινηση του

Φραγμα ανακλασης

Ειναι το σημειο εκεινο που οταν φτασει το σωματιδιο εμποδιζεται η κινηση του (δε σταματα τελειως) και το σωματιδιο πηγαινει σε συγκεκριμενη κατευθυνση

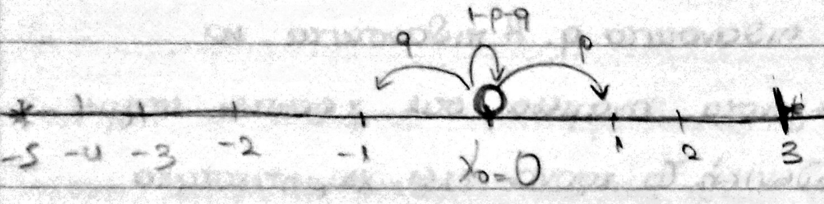
Παραδειγμα 1 (απλοι τυχαιοι περιπατοι με 2 φραγματα απορροφησης)

Ελενη 5€ , Ολγα 3€

Παιζουν ενα παιχνιδι και οταν χασουν δινουν 1€. Το παιχνιδι τελειωνει οταν καποιο απο τις δυο μεινει χωρις χρηματα.

Συμβολιζω με p τη πιθανοτητα να κερδισει η Ελενη με q τη πιθανοτητα να χασει η Ελενη και $1-p-q$ ισοπαλλια

X_n : η σ.δ που περιγραφει το κερδος της Ελενης μετα το n-οστο παιχνιδι (σε διακριτο χρονο)



$X_1 = X_0 + Z_1$

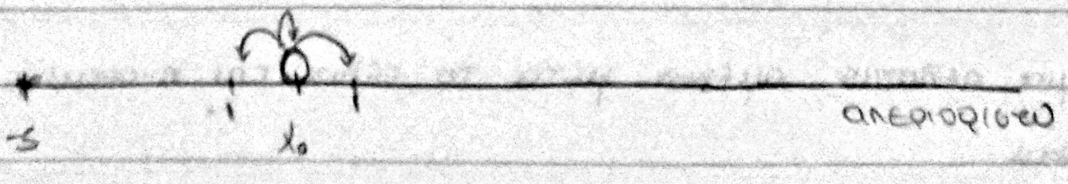
$$P(Z_1 = x) = \begin{cases} p & z=1 \\ q & z=-1 \\ 1-p-q & z=0 \end{cases}$$

Αρα μεχρι στιγμης εχω απλο τυχαιο περιπατο

Τα σημεια 3 και -5 ειναι φραγματα απορροφησης γιατι εκει σταματα το παιχνιδι

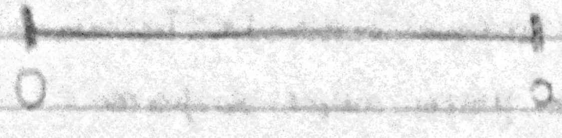
Παραλλαγη

Η Ελενη εχει 5€ και η Ολγα απεριοριστο κεφαλαιο

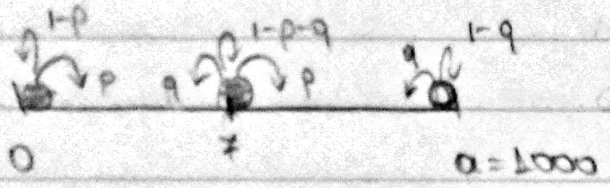


Εχω ενα φραγμα απορροφησης το -5

Απλος τυχαιος περιπατος (Α.Τ.Π) με 2 φραγματα ανακλασης



Εστω X_n η σ.δ. που παριστανει τον αριθμο των φοιτητων που ειναι συνδεδεμενοι στο συστημα χρονος του πανεπιστημιου Ιωαννινων. Το συστημα το μελεταμε καθε στιγμη συγκεκριμενες χρονικες στιγμες. Ενας φοιτητης εισερχεται στο συστημα με πιθανοτητα p και εξερχεται απο αυτο με πιθανοτητα q. Η πιθανοτητα να συμβουν 2 ή περισσοτερα γεγονοτα αναμεσα στις χρονικες στιγμες της μελετης μας ειναι μηδενικη. Το χρονα εχει χωρητικοτητα 1000 ατομα.



Συστημα Εξυπηρετησης

Θεωρω συστημα εξυπηρετησης. Πελατες φτανουν σε αυτο και ο αριθμος πελατων περιγραφεται απο τη Poisson(λ)

λ: πελατες ανα μοναδα του χρονου και εξυπηρετησης απο εναν υπαλληλο

X_n: αριθμος πελατων αμενων μετα το τελος της n-οστης εξυπηρετησης

Να αιτιολογηθει πληρως αν ειναι Μ.Α και να βρεθει ο πινακας μεταβασης P στις ακολουθες

α) χρονος εξυπηρετησης σταθερος και ισος με t χρον. μοναδες

β) χρονος εξυπ. περιγραφεται απο μια διακριτη τ.μ με δυνατες τιμες $t_1, t_2, \dots, t_\ell$ χρονικες μοναδες και αντιστοιχες πιθανοτητες $p_1, p_2, \dots, p_\ell$ με $\sum_1^\ell p_i = 1$

γ) $T \sim b(t)$

δ) $T \sim E\kappa\theta(\mu)$

Λυση

X_n : .....

Εχω σ.δ σε διακριτο χρονο με διακριτο χωρο $\{0,1,2,\dots\}$

Πρεπει ομως να δικαιολογησω οτι ισχυει η Μ.Α

X_{n+1} αριθμος πελατων αμεσως μετα το τελος της n+1 εξυπ.

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - 1 + A_{n+1}, & X_n \geq 1 \\ A_{n+1}, & X_n = 0 \end{cases}$$

A_{n+1}: οσοι ηρθαν κατα τη διαρκεια της n+1 εξυπ

Αντι για A_{n+1} βαζω B οπου B : οσοι ηρθαν κατα τη διαρκεια μιας εξυπηρετησης

Συνεπως εχω:

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - 1 + B, & X_n \geq 1 \\ B, & X_n = 0 \end{cases}$$

Πινακας P : απειρης διαστασης αφου δεν εχω περιορισμο στο συστημα εξυπηρετησης.

$$P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \end{array} \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 \cdots \end{bmatrix}$$

$P(B=0) = b_0$

$P(B=1) = b_1$

$P(B=k) = b_k$

$P(b=k) = P$ (k αφιξεων στη διαρκεια μιας εξυπηρετησης)

$X \sim P(\lambda) \rightarrow$ να εχω x αφιξεις ανα μοναδα του χρονου

$$P(X=x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

a) $b_k = P$ (k αφιξεις σε t χρονικες μοναδες)

λ πελατες σε 1 μον. χρονου

$?$ t μον. χρ.

Αρα λt

Poisson (λt) αρα $\dfrac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$

β) $b_\kappa = P$(κ αφίξεις κατά τη διάρκεια μιας εξυπ.)

$= \sum_{1}^{\ell} P$(κ αφίξεις σε χρόνο t_i | δεδομένου ότι η εξυπ. είναι t_i)

$\cdot P(\text{εξυπ. } t_i) =$

$$= \sum_{i=1}^{\kappa} \frac{(\lambda t_i)^k e^{-\lambda t_i}}{\kappa!} \cdot p_i$$

γ) $b_\kappa = P$(κ αφίξεις κατά τη διάρκεια μιας εξυπ.)

Έχω συνεχή κατανομή

$$b_\kappa = \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda t)^\kappa e^{-\lambda t}}{\kappa!} \cdot b(t)\, dt$$ αρκεί να υπολογίσουμε αυτό το ολοκλήρωμα...

δ) $b(t) = \mu e^{-\mu t}$ για $t \geq 0$

αρκεί να βάλω στο ολοκλήρωμα πάνω το $b(t)$ και να το υπολογίσω

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\lambda t)^\kappa e^{-\lambda t}}{\kappa!} \mu e^{-\mu t} dt$$

Για επόμενη φορά

Ξαναδείξεις για $p^{(n)}$ και p^n